



系统生物学 (Systems Biology)

马彬广



常微分方程系统建模

(第五讲)



常微分方程



在生物系统建模中，刻画某状态变量随时间变化的关系，用常微分方程来描述。

对于确定性的系统而言，系统的状态变量随时间的改变，可以表达成如下的微分方程组：

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x} = f_i(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_l, t) \quad i=1, \dots, n$$

这里 x_i 表示变量，如浓度； p_j 表示参数，如酶浓度或动力学常数； t 表示时间。

写成矢量形式：
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$$

其中， $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ， $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ ， $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l)^T$ 。

例如：代谢建模中，底物降解，浓度变化正比于实际的浓度，就可以表示成：

$$\dot{c}(t) = k \cdot c(t)$$



举例



系统动力学方程：

$$\begin{cases} \frac{dO_2^{\bullet-}}{dt} = c_1 - c_2 \cdot SOD \cdot O_2^{\bullet-} \\ \frac{dH_2O_2}{dt} = c_2 \cdot SOD \cdot O_2^{\bullet-} - c_3 \cdot cat \cdot H_2O_2 \end{cases}$$

可简写为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - bx \\ \frac{dy}{dt} = bx - cy \end{cases} \quad \left(\text{其中, } x = O_2^{\bullet-}, y = H_2O_2, a = c_1, b = c_2 \cdot SOD, c = c_3 \cdot cat \right)$$

给定参数值：

$$c_1 = 6.6 \times 10^{-7}, \quad c_2 = 1.6 \times 10^9, \quad c_3 = 3.4 \times 10^7, \quad SOD = 10^{-5}, \quad cat = 10^{-5}$$

和初始条件：
$$O_2^{\bullet-}(0) = 0, \quad H_2O_2(0) = 0$$

则可解出其时间过程（数值解），并作图如后。

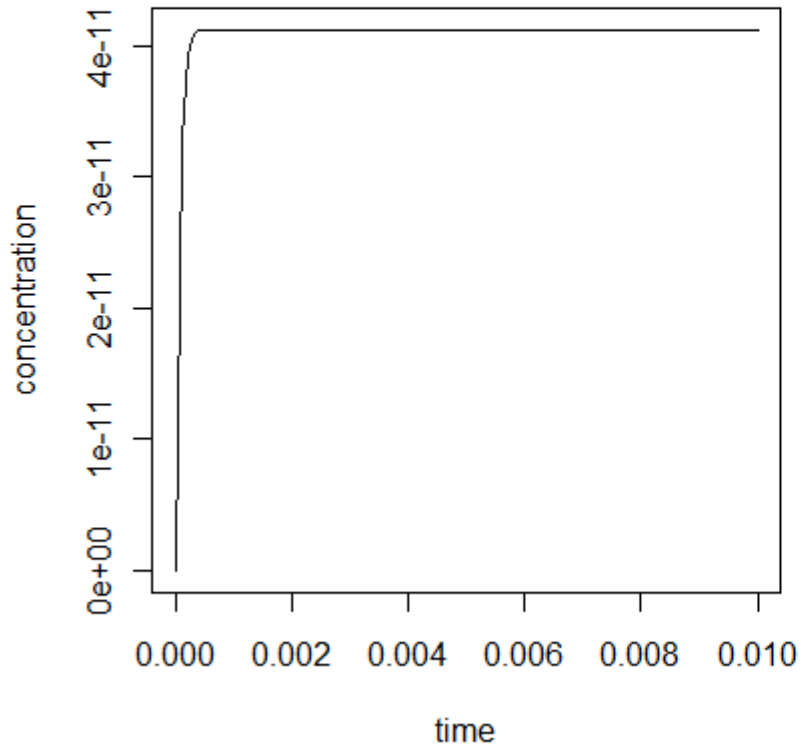


举例

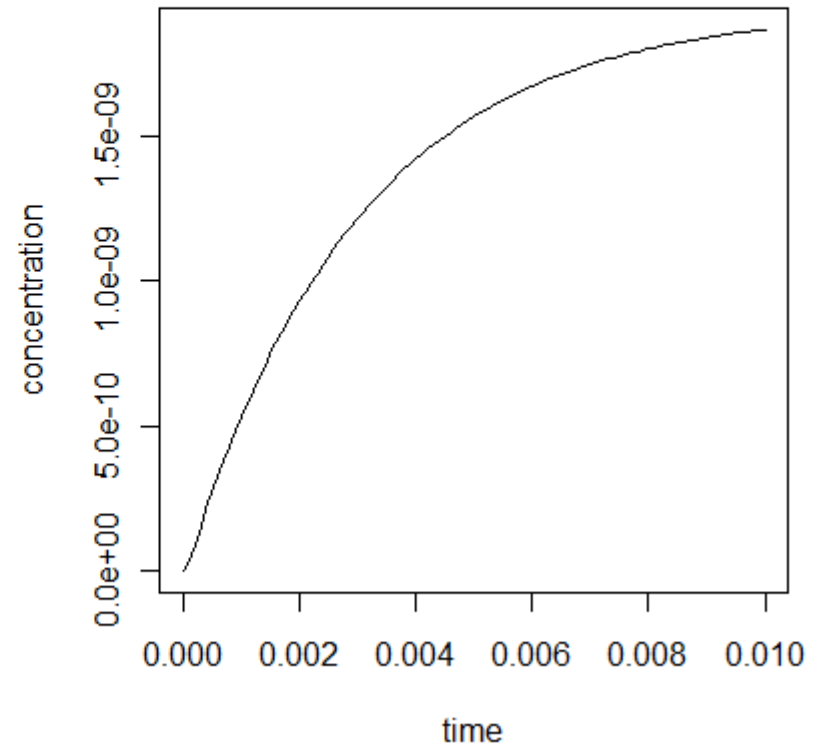


SOD model

O2



H2O2





常微分方程



依赖于一个变量（例如时间 t ）的微分方程称为常微分方程（ODE），否则称为偏微分方程（PDE）。

隐式ODE: $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0; \quad (x = x(t))$

显式ODE: $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}); \quad (x = x(t))$

ODE的阶数，由最高导数 n 决定。

求解微分方程就是寻找一个 n 次可微的函数，使其满足上面的方程式。

通解：满足微分方程的含有不定参数（积分常数）的函数一般形式。

特解：由特定条件（如初始条件、边界条件等）确定下来的特定函数。

特解是通解的特例。



状态空间



系统的状态是系统在某一给定时刻的快照，对于确定性的系统而言，该快照包含了预测系统未来的充分信息。

系统状态可用一组变量来表征，称为系统的状态变量。

系统的状态变量，在某一给定的时刻取一组定值，称为系统的一个相（Phase）。

系统所有可能的状态的集合，称为状态空间，也称相空间。

独立变量的数目 n ，等于状态空间的维数。

对于 $n=2$ 的状态空间，因为可以在一个平面上表示，也成为相平面（Phase Plane）。

一个ODE系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ 的特解，可以通过确定参数值 \mathbf{p} 和初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ 确定，而一个特解对应于状态空间中的一条轨迹。

状态空间中，满足条件 $\dot{\mathbf{x}} = 0$ ($x_1 = 0, \dots, x_n = 0$)的点，对应于系统的稳态。

在稳态中，令 n 个微分方程等于0，则得到 n 个代数方程的方程组。

该方程组可能有多个解，对应于系统多个可能的稳态。

参数 \mathbf{p} 的改变，可能引起稳态数目或者特征的改变，称为对系统的扰动。



微分方程组



例如，下面是2维的一阶线性微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + z_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + z_2 \end{cases}$$

一般地，对于 n 维系统的一阶线性微分方程组，可以表示成矢量形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{z}$$

矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ ，表示方程右边的系数，称为系数矩阵。

向量 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ 指示非齐次性。若 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ，则该线性系统是齐次的，否则，是非齐次的。

线性系统解存在，且可解析求解。

虽然实际问题中，函数通常都是非线性的，但线性系统作为非线性系统在稳态附近的近似，还是很重要、非常有用的。



举例



例如，简单线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

有通解：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{a_{12}}t} (1 + e^{2i\sqrt{a_{12}}t})C_1 - \frac{1}{2}ie^{-i\sqrt{a_{12}}t} (-1 + e^{2i\sqrt{a_{12}}t})\sqrt{a_{12}}C_2 \\ x_2 = \frac{i}{2\sqrt{a_{12}}}e^{-i\sqrt{a_{12}}t} (1 + e^{2i\sqrt{a_{12}}t})C_1 + \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{a_{12}}t} (1 + e^{2i\sqrt{a_{12}}t})C_2 \end{cases}$$

积分常数为 C_1, C_2 。如果选择 $a_{12} = 1$ ，系统简化为：

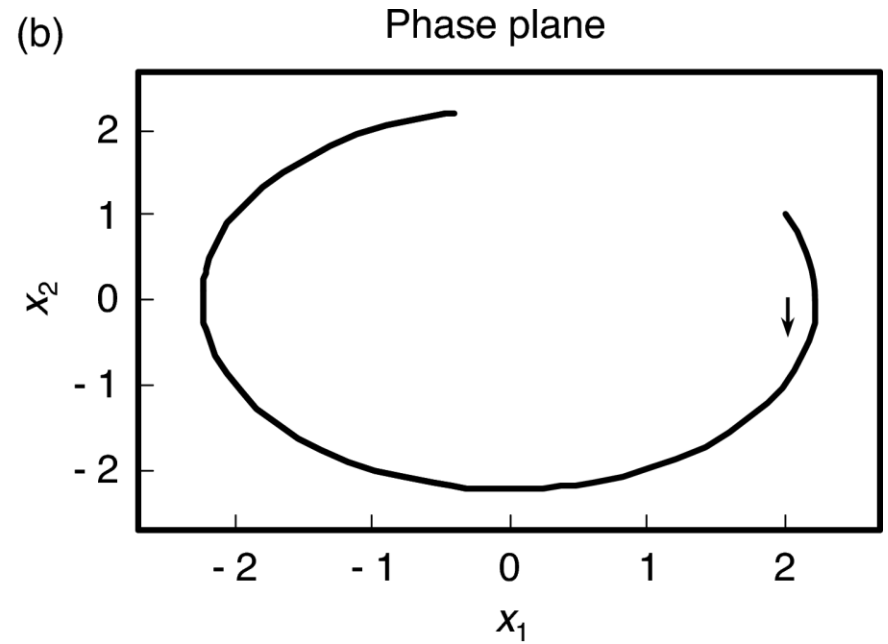
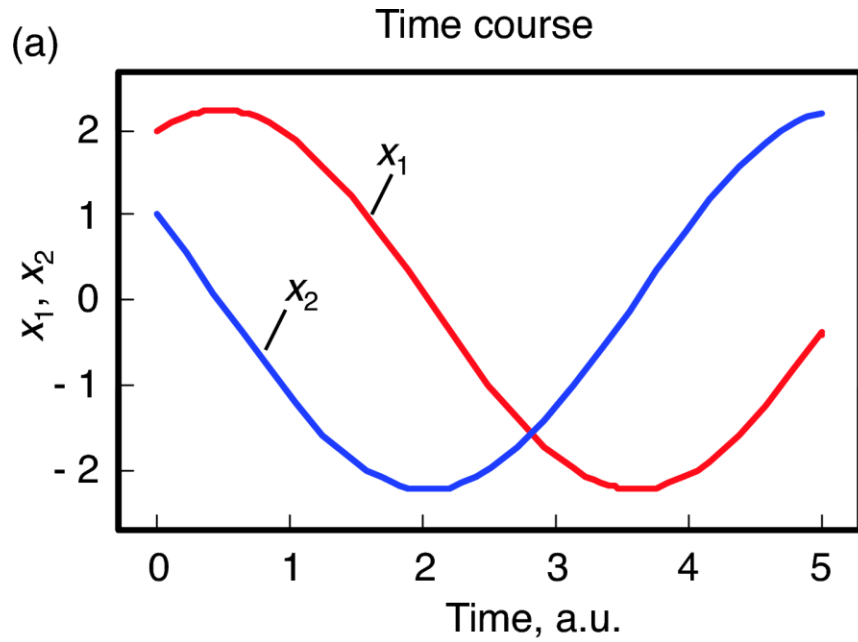
$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad x_2 = C_2 \cos t - C_1 \sin t$$

指定初始条件为 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$ 得特解为 $x_1 = 2\cos t + \sin t, x_2 = \cos t - 2\sin t$

解的时间过程和相平面中的轨迹如后图所示：



举例



© 2010 Wiley-VCH, Weinheim
Klipp - Systems Biology
ISBN: 978-3-527-31874-2 fig-02-08



自治系统及其线性化



如果系统的动力学方程中，不显含时间 t ，则称系统是自治（Autonomous）的，即有

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

否则，若
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$$

则称，系统为非自治的（有时也称系统是受迫的）。

对于自治的系统，在系统的稳态附近，可以对其线性化。考虑系统状态对稳态的偏离，有：

$$x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t) \quad \text{且满足} \quad \dot{x} = f(\bar{x} + \hat{x}(t)) = \frac{d}{dt}(\bar{x} + \hat{x}(t)) = \frac{d}{dt}\hat{x}(t)$$

对偏离的瞬态变化进行泰勒展开，
$$\frac{d}{dt}\hat{x}_i(t) = f_i(\bar{x}_1 + \hat{x}_1, \dots, \bar{x}_n + \hat{x}_n)$$



自治系统及其线性化



给出:
$$\frac{d}{dt} \hat{x}_i = f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \hat{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \hat{x}_j \hat{x}_k + \dots$$

既然考虑稳态, 故有: $f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ 忽略高次项, 有

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \hat{x}_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j$$

其中系数 $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, 在稳态时刻, 取常数, 称为Jacobian矩阵:

$$\mathbf{J} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

对于线性系统, 雅可比矩阵就是其系数矩阵, 即

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}$$



关于ODE系统的解



对于用ODE描述的系统，我们主要对两类问题感兴趣：（1）系统的时间演变；
（2）系统的稳态。

寻找线性ODE系统的稳态：

令 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ，由 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z}$ ，在稳态， $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$ ，则 $\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$

齐次线性ODE，可以用指数函数求解。在最简单的 $n=1$ 情况下，有：

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1$$

设有指数函数， $x_1(t) = b_1 e^{\lambda t}$ 代入上面的方程，有 $b_1 \lambda e^{\lambda t} = a_{11} b_1 e^{\lambda t}$

如果 $\lambda = a_{11}$ ，则上面的等式成立，于是得到该方程的通解 $x_1(t) = b_1 e^{a_{11}t}$

为了寻找特解，必须指定初始条件 $x_1(t=0) = x_1^0 = b_1 e^{a_{11}t} |_{t=0} = b_1$ ，因此，特解为：

$$x_1(t) = x_1^0 e^{a_{11}t}$$



稳态的稳定性 (stability of steady state)



如果一个系统处于稳态，那么它可以保持在稳态直到有外部扰动发生。根据扰动后的行为，稳态分为以下几种：

- 稳定的 (stable, 系统可以返回这个状态)
- 非稳定的 (unstable, 系统离开这个状态)
- 半稳定的 (metastable, 系统的行为是无差别indifferent的)

渐进稳定的稳态：对于稳定的稳态，如果以它附近的初始条件，则所得系统的解，在 $t \rightarrow \infty$ 时，趋向于该稳态，就称该稳定的稳态是渐进 (asymptotically) 稳定的。

稳态的局部稳定性和全局稳定性：局部稳定性是指小扰动之后的系统行为，而全局稳定性是指任意扰动之后的系统的行为。

稳态渐进稳定的判定方法：如果在稳态附近，线性化的系统ODE的雅可比矩阵的所有特征值都有严格的负实部，则该稳态是渐进稳定的。

下面针对一维和二维的系统，详细说明稳态的稳定性。



一维系统



对于一维系统，不失一般性，设稳态在0点，即 $\bar{x}_1 = 0$

系统 $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ 线性化后有 $\dot{x}_1 = (\partial f_1 / \partial x_1)|_{\bar{x}_1} x_1 = a_{11}x_1$ ，雅可比矩阵为

$A = \{a_{11}\}$ ，具有唯一的特征值 $\lambda_1 = a_{11}$ ，系统的解就是 $x_1(t) = x_1^0 e^{\lambda_1 t}$ ，

显然，当 $\lambda_1 > 0$ 时， $e^{\lambda_1 t}$ 随时间 t 而增长，系统偏离原来的稳态（0）。

而当 $\lambda_1 < 0$ 时， $e^{\lambda_1 t}$ 随时间 t 而减小，有 $t \rightarrow \infty$ 时， $x_1(t) \rightarrow \bar{x}_1$ ，即系统渐进稳定。

而当 $\lambda_1 = 0$ 时，对线性系统的考察，不足以判定原系统在该稳态的渐进稳定性，此时，需要考虑高阶项的作用。



二维系统



对于2维系统，其一般形式为：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

其线性化系统为：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} x_2\end{aligned} \quad \text{或} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

要求 \mathbf{A} 的特征值，需要解其特征多项式方程：

$$\lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{Tr A}} \lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\text{Det A}} = 0$$

于是有：

$$\lambda_{1/2} = \frac{\text{Tr A}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{Tr A})^2}{4} - \text{Det A}}$$

对于 $\frac{(\text{Tr A})^2}{4} - \text{Det A} \geq 0$ ，其特征值是实数，
 否则，特征值是复数，解包含振荡的部分。

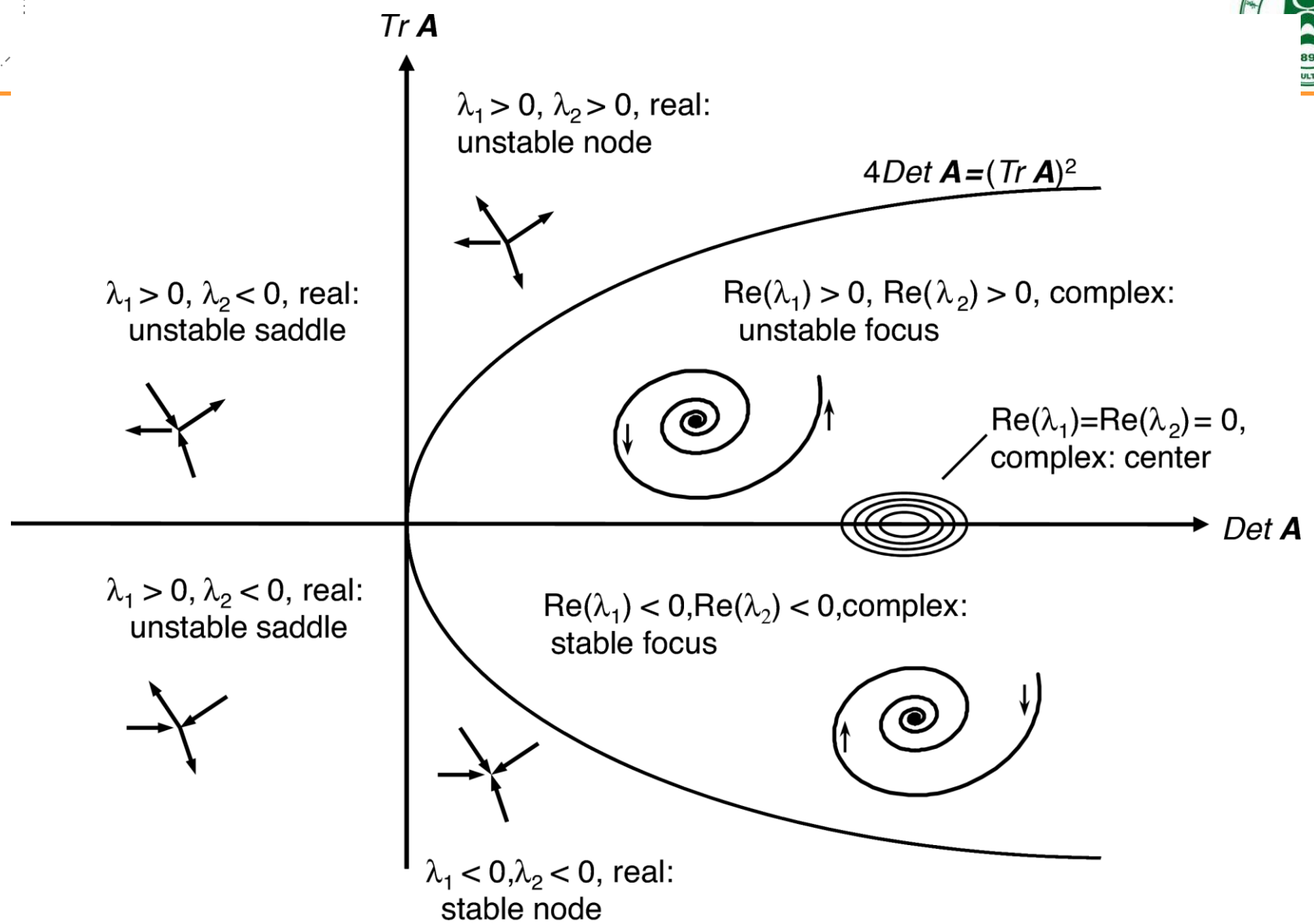


二维系统



对于2维系统而言，根据其雅可比矩阵特征值的符号，可以有下面这些情况：

1. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 全为实数，稳定节点；
2. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, 全为实数，不稳定节点；
3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 全为实数，鞍点，不稳定；
4. $\text{Re}(\lambda_1) < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0$, 全为复数但都具有负实部，稳定焦点；
5. $\text{Re}(\lambda_1) > 0, \text{Re}(\lambda_2) > 0$, 全为复数但都具有正实部，不稳定焦点；
6. $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$, 全为复数但都具有零实部，中心点，不稳定；



© 2010 Wiley-VCH, Weinheim
Klipp - Systems Biology
ISBN: 978-3-527-31874-2 fig-02-09



线性化系统与原系统稳定性之间的关系



- 如果线性化系统的稳态是渐进稳定的，则原系统的稳态也是渐进稳定的；
- 如果线性化系统的稳态是鞍点、不稳定节点或不稳定焦点，则原系统的稳态也是不稳定的。
- 如果线性化系统的稳态是中心点，则原系统稳态的稳定性不可据此判定。

Routh-Hurwitz定理：对于维数 $n > 2$ 的系统，其ODE系统的特征多项式方程为：

$$c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

这一 n 阶多项式当 $n > 4$ 时，写不出解析解，但可以用Hurwitz判据，判断其特征值的实部是否为负，通过构建Hurwitz矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & 0 \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & c_n & c_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_0 \end{pmatrix} = \{h_{ik}\} \quad \text{with} \quad h_{ik} = \begin{cases} c_{n+i-2k}, & \text{if } 0 \leq 2k-i \leq n \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

如果特征多项式的所有系数 c_i 和该矩阵的所有前主子式都为正值，则特征多项式方程的所有解的实部都是负数。



稳态的全局稳定性



对于系统的一个状态，如果对于所有的初始条件当 $t \rightarrow \infty$ 时，轨迹都能趋于该状态，则称此状态是全局稳定的。一个ODE系统的状态的全局稳定性，可以用Lyapunov函数来检验。

- (1) 通过坐标变换，将稳态转换成起始点 $\hat{x} = x - \bar{x}$ 。
- (2) 寻找具有下述特性的所谓Lyapunov函数 $V_L(x_1, \dots, x_n)$
 - 1) $V_L(x_1, \dots, x_n)$ 对于所有的变量 x_i 有连续的导数；
 - 2) $V_L(x_1, \dots, x_n)$ 满足
$$\begin{cases} V_L(x_1, \dots, x_n) = 0, & \text{当 } x_i = 0 \\ V_L(x_1, \dots, x_n) > 0, & \text{当 } x_i \neq 0 \end{cases}$$
 - 3) V_L 的时间微分由下式给出

$$\frac{dV_L}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_L}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

那么，对于一个状态，

如果在它的领域内， $V_L(x(t))$ 的时间微分没有正值，则该状态是稳定的。

如果在它的领域内， $V_L(x(t))$ 的时间微分是负定的，

即
$$\begin{cases} \frac{dV_L}{dt} = 0, & \text{当 } x_i = 0 \\ \frac{dV_L}{dt} < 0, & \text{当 } x_i \neq 0 \end{cases}$$
，则系统在该状态是渐进稳定的。



举例



例如，对于系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \text{有解:} \quad \begin{cases} x_1(t) = x_1^0 e^{-t} \\ x_2(t) = x_2^0 e^{-t} \end{cases}$$

状态 $x_1 = x_2 = 0$ 是渐进稳定的。

利用正定的函数 $V_L = x_1^2 + x_2^2$ 作为Lyapunov函数，可以用于判断全局稳定性。因为， $\frac{dV_L}{dt} = \left(\frac{\partial V_L}{\partial x_1}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial V_L}{\partial x_2}\right)\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1) + 2x_2(-x_2)$ 是负定的，所以，系统稳态 $x_1 = x_2 = 0$ 是全局稳定的。



极限环

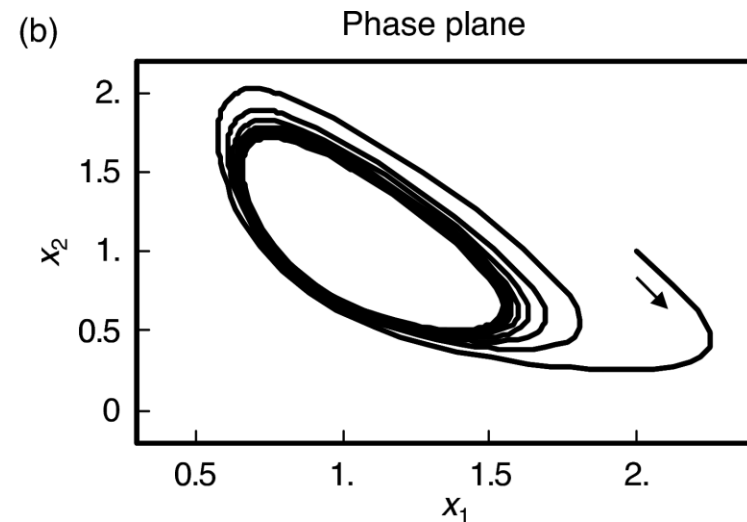
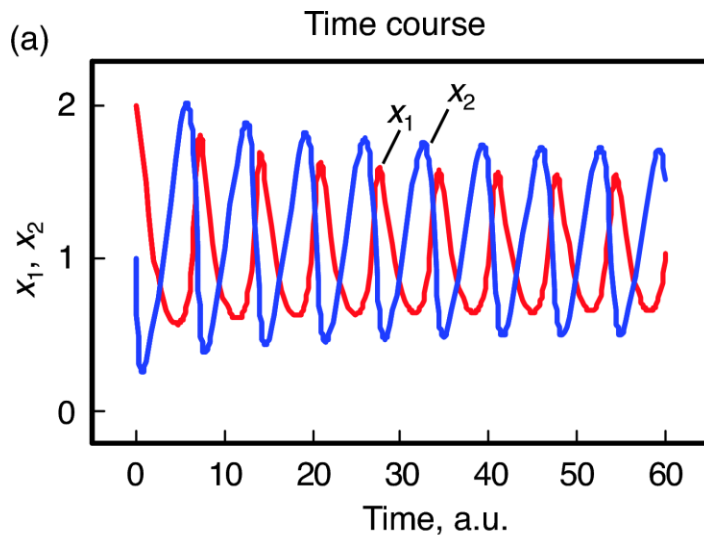


振荡行为是生物学中的一个典型现象。引起振荡的原因可能是外部的，也可能是内部的。如果相平面中存在极限环，则表明系统存在内部固有的稳态振荡。

极限环是一个封闭的轨迹，对于 $t \rightarrow \infty$ ，所有邻近的轨道都是周期解，或趋近（稳定的）极限环，或远离（不稳定的）极限环。

例如，对于一个2维的非线性系统 $\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 - x_1$, $\dot{x}_2 = p - x_1^2 x_2$ ，有稳态 $\bar{x}_1 = p$, $\bar{x}_2 = 1/p$ 。如果选 $p = 0.98$ ，则这个稳态是不稳定的，因为 $\text{Tr} \mathbf{A} = 1 - p^2 > 0$ 。

在初始条件为 $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$ 时，该系统解的时间过程和相平面如图所示。





有界系统



由状态变量 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n]^T$

和微分方程: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$

所描述的系统, 有界性条件是指: $0 \leq x_i(t) \leq \infty \quad (\forall t \geq 0, 1 \leq i \leq n).$

满足有界性条件的系统称为“有界系统”。

系统有界的条件为:

- (1) 对任意 i , 当 $\mathbf{x} \geq 0$ 且 $x_i = 0$ 时, 有 $f_i(\mathbf{x}) > 0$;
- (2) 存在 $M_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$, 使得对任意 i , 当 $\mathbf{x} > 0$ 且 $x_i > M_i$ 时, 有 $f_i(\mathbf{x}) < 0$, 则由上述微分方程所描述的系统初值为 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > 0$ 的解满足上述有界条件。

对于有界系统, 可以证明上述微分方程至少有一个正平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, 即满足

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

的解, 稳定的平衡点通常对应于生物系统中有生物意义的状态。



线性微分方程组



对于线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

如果系数矩阵 \mathbf{A} 不依赖于时间 t , 就是常系数微分方程, 有完善的求解理论,

其解可以表示为: $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$.

如果系数矩阵 \mathbf{A} 依赖于时间, 则一般不能表示成显式解。

如果已知上述方程的 n 个线性无关解 $x_i(t)$ ($i=1, \dots, n$), 则该方程组的通解

可以表示成这 n 个解 (也称为基础解系) 的线性组合:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t), \text{ 其中, } c_i \text{ 为常数。}$$



XPPAUT软件介绍



XPPAUT is a tool for solving

differential equations,
difference equations,
delay equations,
functional equations,
boundary value problems, and
stochastic equations.

XPP contains the code for the popular bifurcation program, [AUTO](#). Thus, you can switch back and forth between XPP and AUTO, using the values of one program in the other and vice-versa.

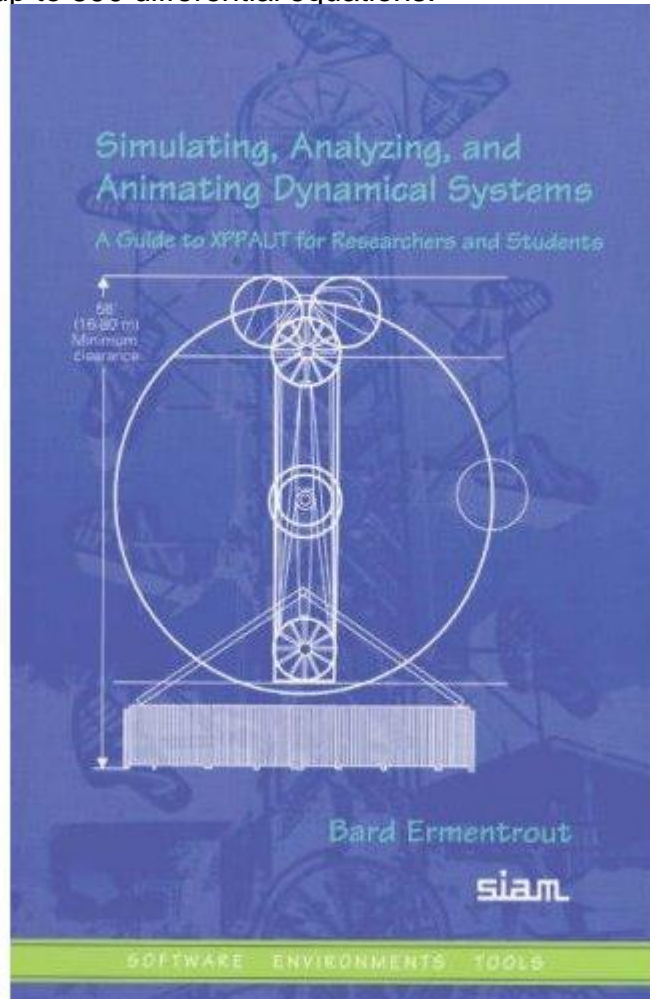


XPPAUT软件介绍



XPP has the capabilities for handling up to 590 differential equations.

- ❑ There are over a dozen
- ❑ Up to 10 graphics windo
- ❑ PostScript output is sup
- ❑ Post processing is easy data.
- ❑ Equilibria and linear stal
- ❑ Null clines and flow field
- ❑ Poincare maps and equ
- ❑ Some useful averaging
- ❑ Equations with Dirac de
- ❑ There is a curve-fitter ba
- ❑ dynamical systems.
- ❑ It is possible to automat
- ❑ attractor as some paramet
- ❑ Dynamically link to exte



s and a symplectic solver.
ted.

ns to columns of your

re included.

ts to the solutions to

rametric changes in the

XPPAUT is h

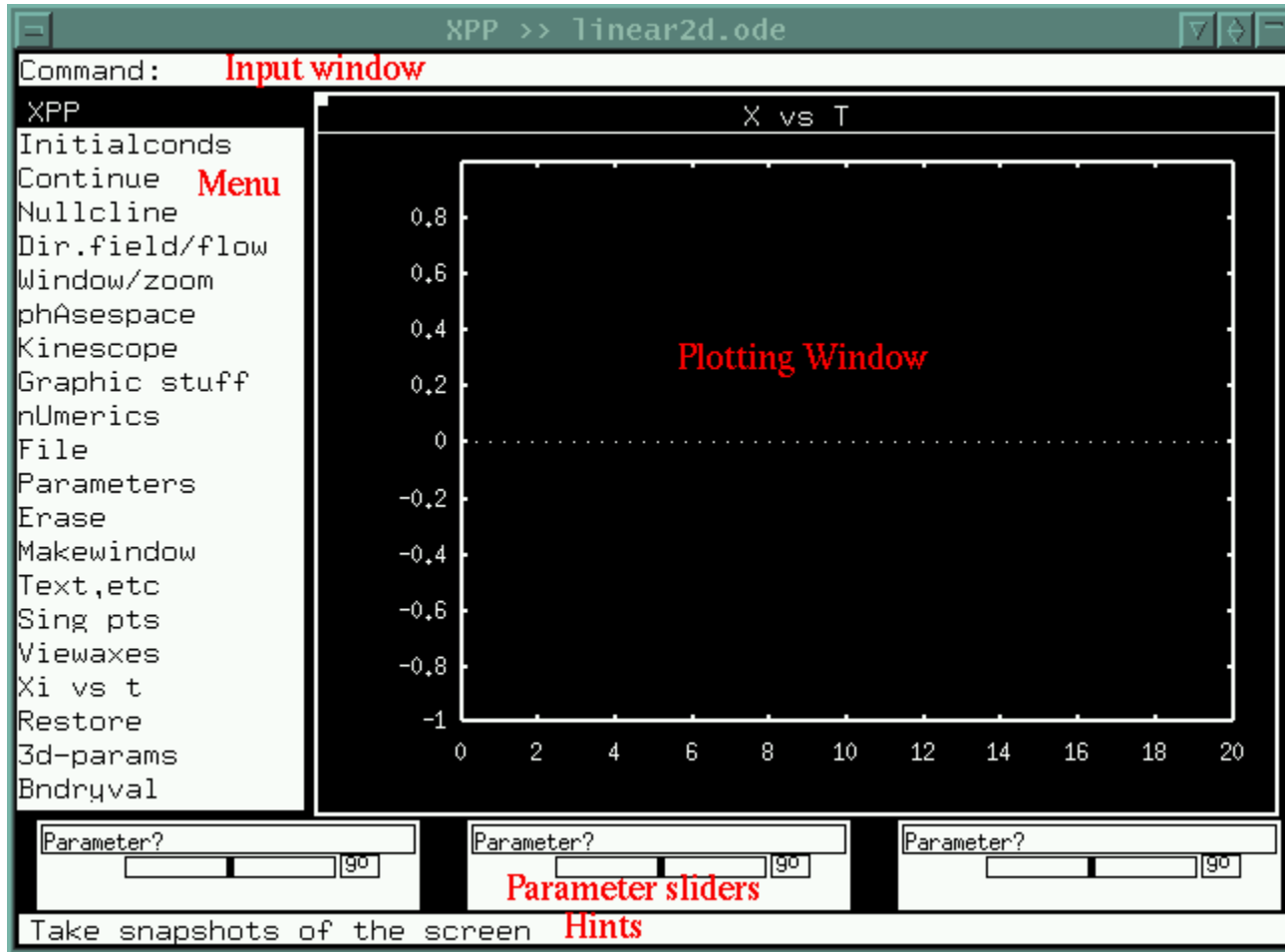
(s, iPad!)



XPPAUT软件介绍



主界面





XPPAUT软件介绍



模型窗口

Equations

Up Down Equation window

$\frac{dX}{dT} = A * X + B * Y$
 $\frac{dY}{dT} = C * X + D * Y$

Parameters

Ok Default Cancel Go

a 0
b 1
c -1
d 0

Parameters

Initial Data

Ok Default Cancel Go

X 1
Y 0

xvst xvsy array

Initial Data

Data Viewer

Find Restore First Up PgUp Left Home
Get Write Last Down PgDn Right End
Replace Load Unrepl Table Add co Del co

Find closest data point to given value

Time	X	Y		
0	1	0		
0.05000001	0.9987503	-0.04997917		
0.1	0.9950042	-0.09983341		
0.15000001	0.9887711	-0.1494381		
0.2	0.9800666	-0.1986693		
0.25	0.9689124	-0.2474039		
0.30000001	0.9553365	-0.2955202		
0.34999999	0.9393727	-0.3428978		
0.40000001	0.921061	-0.3894183		
0.44999999	0.9004471	-0.4349655		
0.5	0.8775826	-0.4794255		
0.55000001	0.8525245	-0.5226872		
0.60000002	0.8253356	-0.5646424		
0.64999998	0.7960838	-0.6051864		
0.69999999	0.7648422	-0.6442177		
0.75	0.7316889	-0.6816387		
0.80000001	0.6967067	-0.7173561		
0.85000002	0.6599832	-0.7512804		
0.89999998	0.62161	-0.7833269		
0.94999999	0.5816831	-0.8134155		

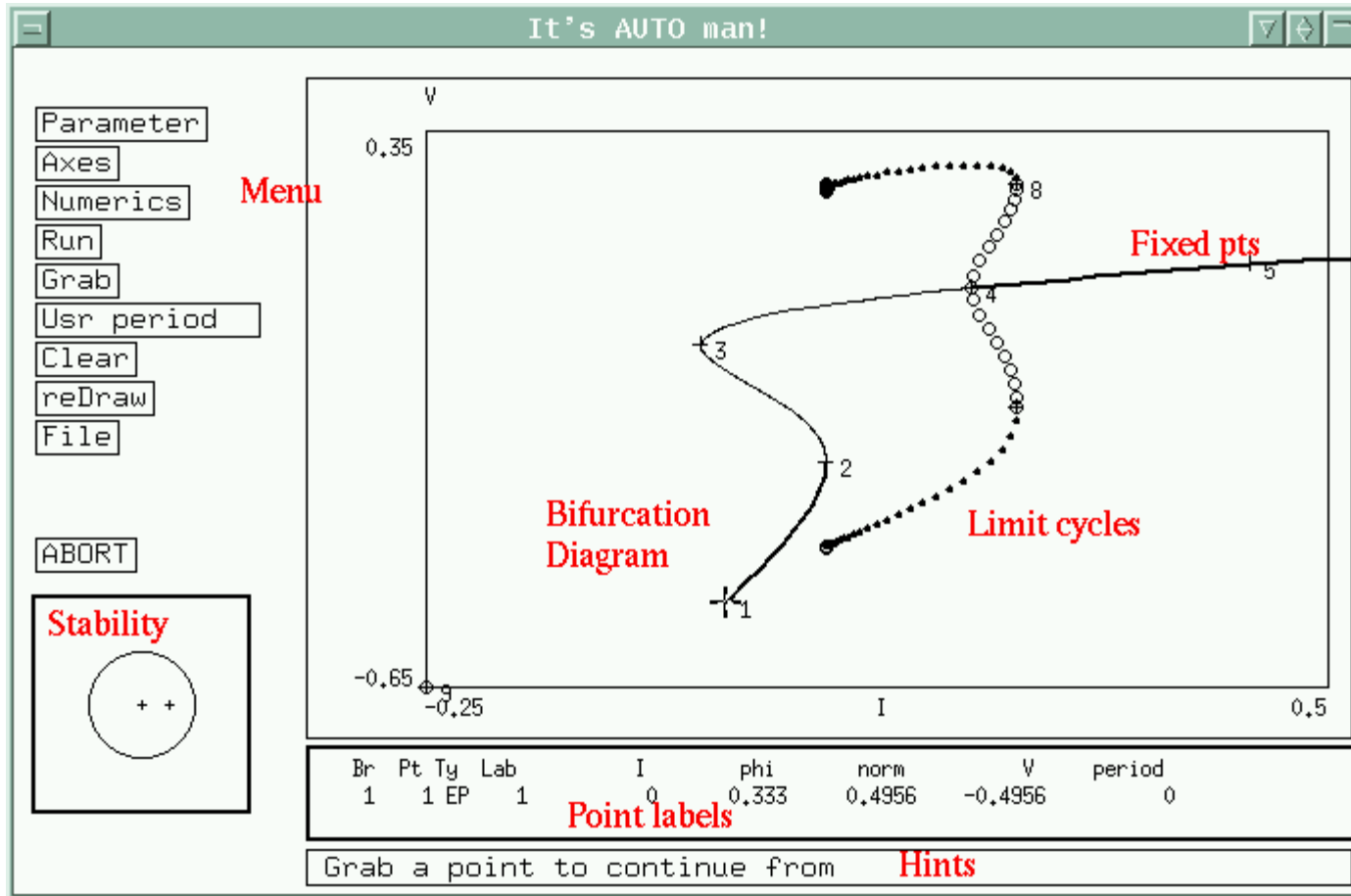
Data viewer



XPPAUT软件介绍

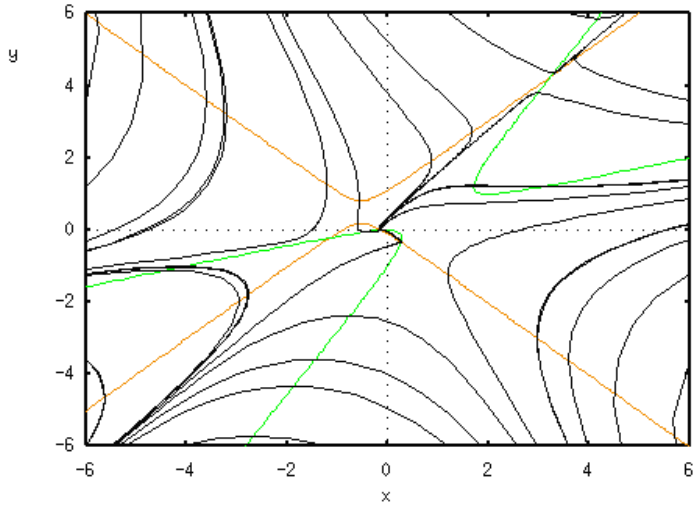


AUTO界面

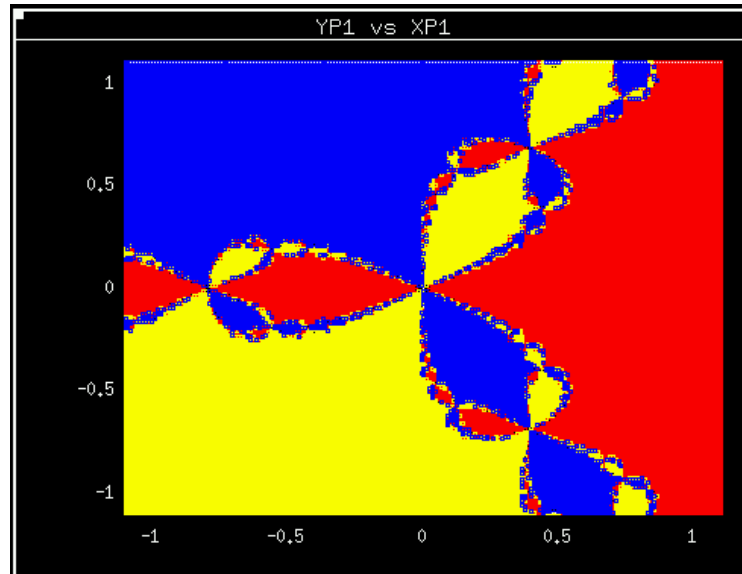
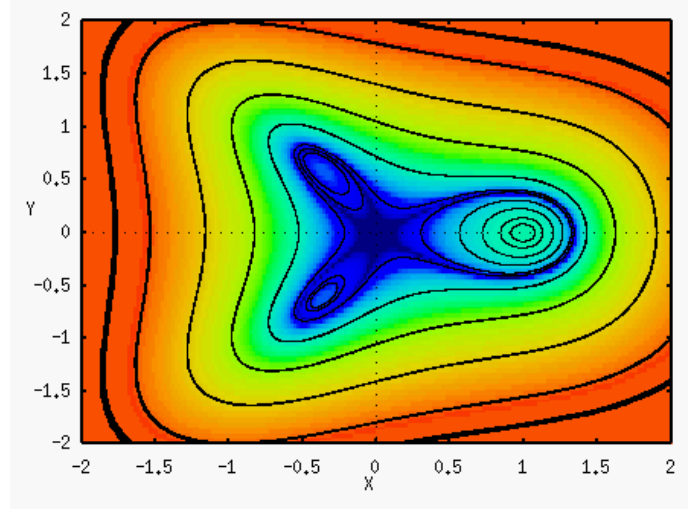




XPPAUT软件介绍



相平面

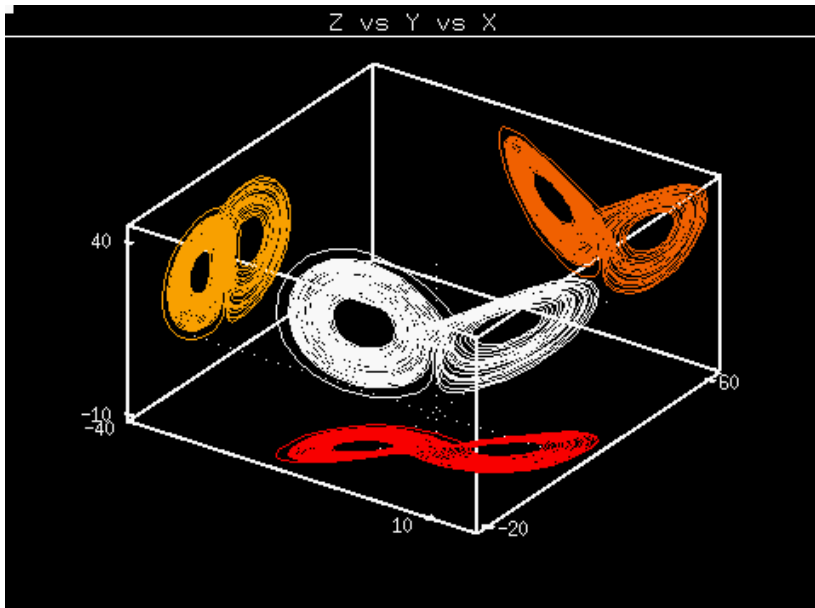




XPPAUT软件介绍



模型求解举例



洛仑兹吸引子

```
# the lorenz equations
# with some fancy graphics options
x'=s*(-x+y)
y'=r*x-y-x*z
z'=-b*z+x*y
par r=27,s=10,b=2.66
init x=-7.5,y=-3.6,z=30
# now add some projection planes for 2D plots
aux x2=xplane
aux y2=yplane
aux z2=zplane
par xplane=-35,yplane=60,zplane=-10
# set up the numerics
@ total=50,dt=.02
# set up 3D plot
@ xplot=x,yplot=y,zplot=z,axes=3d
# tell XPP there are 4 plots altogether
@ nplot=4
# here are the 3 projections
@ xp2=x,yp2=y,zp2=z2
@ xp3=x,yp3=y2,zp3=z
@ xp4=x2,yp4=y,zp4=z
# set up the 3D window
@ xmin=-40,xmax=18,ymin=-24,ymax=64,zmin=-12,zmax=45
@ xlo=-1.4,ylo=-1.7,xhi=1.7,yhi=1.7
# and rotate the plot a bit so it looks nice
@ theta=35
done
```



XPPAUT软件介绍



动画脚本

```
# animation of double pendulum
#
# frame it
permanent
rect 0;0;1;1;$BLUE;3
transient
fcircle .5;.5;.025;$BLACK
# here is the base
line .5;.5;.5+.2*sin(th1);.5-.2*cos(th1)
line .5+.2*sin(th1);.5-.2*cos(th1);.5+.2*sin(th1)+.2*sin(th2)\
;.5-.2*cos(th1)-.2*cos(th2)
fcircle .5+.2*sin(th1);.5-.2*cos(th1);.04;$RED
fcircle .5+.2*sin(th1)+.2*sin(th2);.5-.2*cos(th1)-.2*cos(th2);.04;$GREEN
end
```

