系统生物学
(Systems Biology)

马彬广

常微分方程系统建模

（第五讲）

常微分方程

在生物系统建模中，刻画某状态变量随时间变化的关系，用常微分方程来描述。

对于确定性的系统而言，系统的状态变量随时间的改变，可以表达成如下的微分方程组：

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x} = f_i(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_l, t) \quad i = 1, \cdots, n$$

这里x_i表示变量，如浓度；p_j表示参数，如酶浓度或动力学常数；t表示时间。

写成矢量形式：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$$

其中，$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n)^T$, $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_l)^T$。

例如：代谢建模中，底物降解，浓度变化正比于实际的浓度，就可以表示成：

$$\dot{c}(t) = k \cdot c(t)$$

举例

反应体系：$\xrightarrow{c_1} O_2^{\cdot-} \xrightarrow[SOD]{c_2} H_2O_2 \xrightarrow[cat]{c_3} H_2O$

系统动力学方程：
$$\begin{cases} \dfrac{dO_2^{\bullet-}}{dt} = c_1 - c_2 \cdot SOD \cdot O_2^{\bullet-} \\ \dfrac{dH_2O_2}{dt} = c_2 \cdot SOD \cdot O_2^{\bullet-} - c_3 \cdot cat \cdot H_2O_2 \end{cases}$$

可简写为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a - bx \\ \dfrac{dy}{dt} = bx - cy \end{cases}$$

（其中，$x = O_2^{\bullet-}$，$y = H_2O_2$，$a = c_1$，$b = c_2 \cdot SOD$，$c = c_3 \cdot cat$）

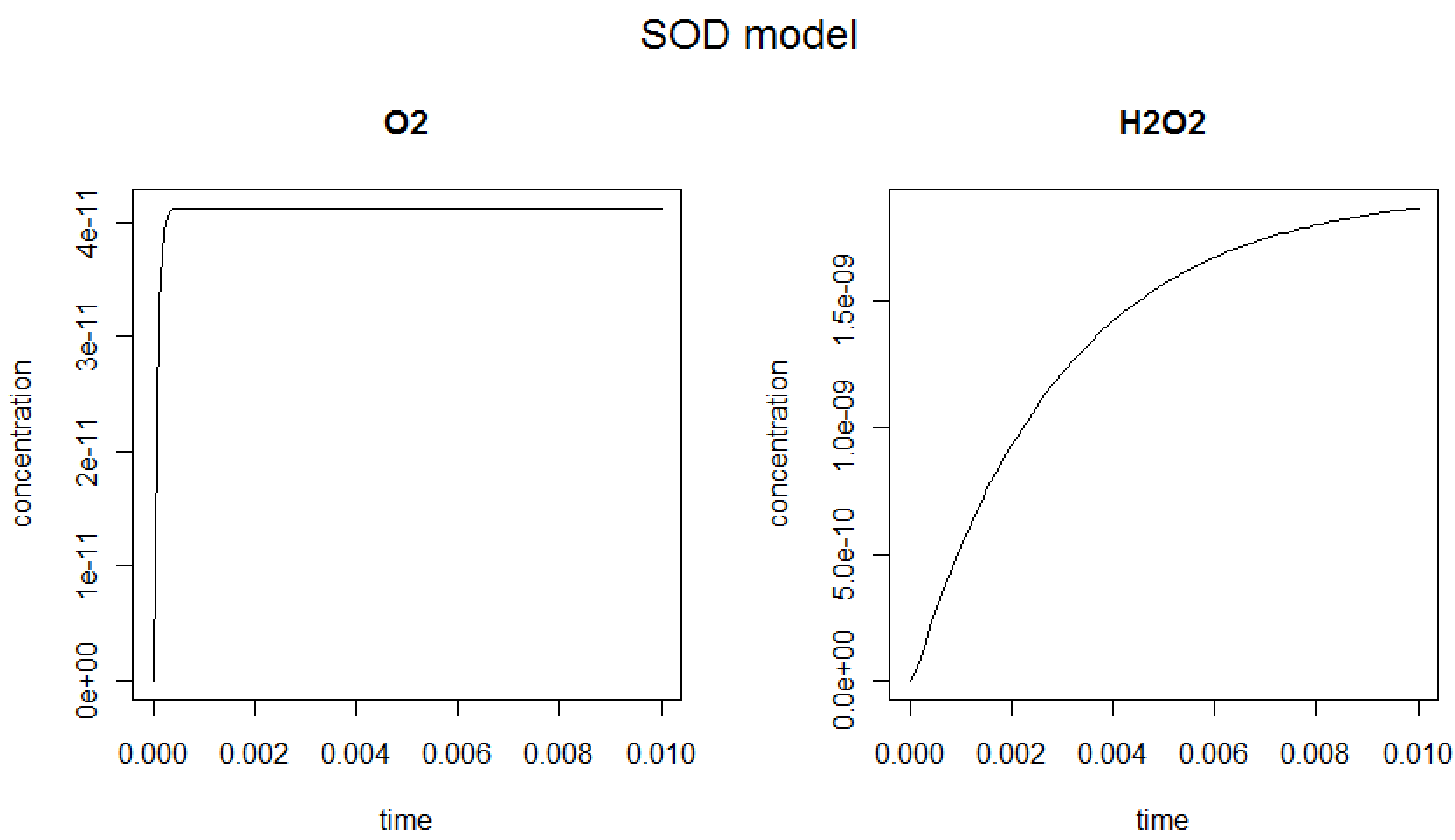
给定参数值：

$$c_1 = 6.6\times10^{-7},\ c_2 = 1.6\times10^{9},\ c_3 = 3.4\times10^{7},\ SOD = 10^{-5},\ cat = 10^{-5}$$

和初始条件：$O_2^{\bullet-}(0) = 0,\ H_2O_2(0) = 0$

则可解出其时间过程（数值解），并作图如后。

举例


SOD model
O2
H2O2
concentration
time
0e+00
1e-11
2e-11
3e-11
4e-11
0.0e+00
5.0e-10
1.0e-09
1.5e-09
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010

常微分方程

依赖于一个变量（例如时间t）的微分方程称为常微分方程（ODE），否则称为偏微分方程（PDE）。

隐式ODE： $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0; \quad \big(x = x(t)\big)$

显式ODE： $x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}); \quad \big(x = x(t)\big)$

ODE的阶数，由最高导数n决定。

求解微分方程就是寻找一个n次可微的函数，使其满足上面的方程式。

通解：满足微分方程的含有不定参数（积分常数）的函数一般形式。

特解：由特定条件（如初始条件、边界条件等）确定下来的特定函数。

特解是通解的特例。

状态空间

系统的状态是系统在某一给定时刻的快照，对于确定性的系统而言，该快照包含了预测系统未来的充分信息。

系统状态可用一组变量来表征，称为系统的状态变量。

系统的状态变量，在某一给定的时刻取一组定值，称为系统的一个相（Phase）。

系统所有可能的状态的集合，称为状态空间，也称相空间。

独立变量的数目*n*，等于状态空间的维数。

对于*n*=2的状态空间，因为可以在一个平面上表示，也成为相平面（Phase Plane）。

一个ODE系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$的特解，可以通过确定参数值**p**和初始条件$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$确定，而一个特解对应于状态空间中的一条轨迹。

状态空间中，满足条件$\dot{\mathbf{x}} = 0 \ (x_1 = 0, \ \cdots, \ x_n = 0)$的点，对应于系统的稳态。
在稳态中， 令*n*个微分方程等于0， 则得到*n*个代数方程的方程组。
该方程组可能有多个解，对应于系统多个可能的稳态。
参数**p**的改变，可能引起稳态数目或者特征的改变，称为对系统的扰动。

例如，下面是2维的一阶线性微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + z_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x + z_2 \end{cases}$$

一般地，对于n维系统的一阶线性微分方程组，可以表示成矢量形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z}$$

矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, 表示方程右边的系数，称为系数矩阵。

向量 $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n)^T$ 指示非齐次性。若$\mathbf{z} = 0$, 则该线性系统是齐次的，否则，是非齐次的。

线性系统解存在，且可解析求解。

虽然实际问题中，函数通常都是非线性的，但线性系统作为非线性系统在稳态附近的近似，还是很重要、非常有用的。

举例

例如，简单线性系统
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

有通解：
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}e^{-i\sqrt{a_{12}t}}\left(1+e^{2i\sqrt{a_{12}t}}\right)C_1 - \dfrac{1}{2}ie^{-i\sqrt{a_{12}t}}\left(-1+e^{2i\sqrt{a_{12}t}}\right)\sqrt{a_{12}}C_2 \\ x_2 = \dfrac{i}{2\sqrt{a_{12}}}e^{-i\sqrt{a_{12}t}}\left(1+e^{2i\sqrt{a_{12}t}}\right)C_1 + \dfrac{1}{2}e^{-i\sqrt{a_{12}t}}\left(1+e^{2i\sqrt{a_{12}t}}\right)C_2 \end{cases}$$

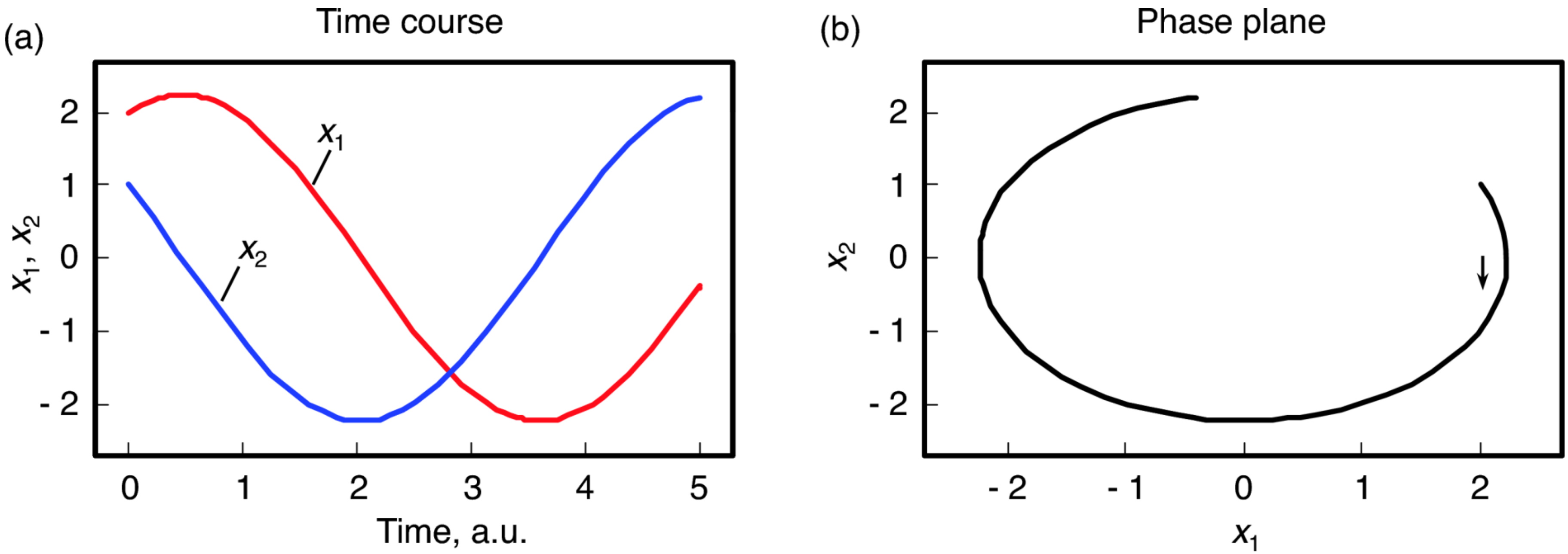
积分常数为C_1, C_2。如果选择$a_{12}=1$，系统简化为：

$$x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t,\quad x_2 = C_2\cos t - C_1\sin t$$

指定初始条件为$x_1(0)=2$，$x_2(0)=1$ 得特解为 $x_1 = 2\cos t + \sin t,\quad x_2 = \cos t - 2\sin t$

解的时间过程和在相平面中的轨迹如后图所示：

举例



Klipp - Systems Biology
ISBN: 978-3-527-31874-2 fig-02-08

自治系统及其线性化

如果系统的动力学方程中，不显含时间t，则称系统是自治（Autonomous）的，即有

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

否则，若 $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$$

则称，系统为非自治的（有时也称系统是受迫的）。

对于自治的系统，在系统的稳态附近，可以对其线性化。考虑系统状态对稳态的偏离，有:

$$x(t) = \overline{x} + \hat{x}(t) \quad \text{且满足} \quad \dot{x} = f\left(\overline{x} + \hat{x}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{x} + \hat{x}(t)\right) = \frac{d}{dt}\hat{x}(t)$$

对偏离的瞬态变化进行泰勒展开， $$\frac{d}{dt}\hat{x}_i(t) = f_i(\overline{x}_1 + \hat{x}_1, \ \cdots, \ \overline{x}_n + \hat{x}_n)$$

自治系统及其线性化

给出： $$\frac{d}{dt}\hat{x}_i = f_i(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\hat{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\hat{x}_j\hat{x}_k + \cdots$$

既然考虑稳态，故有： $f_i(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) = 0$ 忽略高次项，有

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j$$

其中系数 $a_{ij} = {}^{\partial f_i}\!/_{\partial x_j}$，在稳态时刻，取常数，称为Jacobian矩阵：

$$\mathbf{J} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

对于线性系统，雅可比矩阵就是其系数矩阵，即

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}$$

关于ODE系统的解

对于用ODE描述的系统，我们主要对两类问题感兴趣：（1）系统的时间演变；（2）系统的稳态。

寻找线性ODE系统的稳态：

令 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$, 由 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{z}$, 在稳态, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{z}=\mathbf{0}$, 则 $\bar{\mathbf{x}}=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$

齐次线性ODE，可以用指数函数求解。在最简单的 n=1 情况下，有：

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1$$

设有指数函数，$x_1(t)=b_1e^{\lambda t}$ 代入上面的方程，有 $b_1\lambda e^{\lambda t}=a_{11}b_1e^{\lambda t}$

如果 $\lambda=a_{11}$, 则上面的等式成立，于是得到该方程的通解 $x_1(t)=b_1e^{a_{11}t}$

为了寻找特解，必须指定初始条件 $x_1(t=0)=x_1^0=b_1e^{a_{11}t}\,|_{t=0}=b_1$，因此，特解为：

$$x_1(t)=x_1^0e^{a_{11}t}$$

稳态的稳定性（stability of steady state）

如果一个系统处于稳态，那么它可以保持在稳态直到有外部扰动发生。根据扰动后的行为，稳态分为以下几种：

- 稳定的（stable，系统可以返回这个状态）
- 非稳定的（unstable，系统离开这个状态）
- 半稳定的（metastable，系统的行为是无差别indifferent的）

渐进稳定的稳态：对于稳定的稳态，如果以它附近的状态为初始条件，则所得系统的解，在$t\rightarrow\infty$时，趋向于该稳态，就称该稳定的稳态是渐进（asymptotically）稳定的。

稳态的局部稳定性和全局稳定性：局部稳定性是指小扰动之后的系统行为，而全局稳定性是指任意扰动之后的系统的行为。

稳态渐进稳定的判定方法：如果在稳态附近，线性化的系统ODE的雅可比矩阵的所有特征值都有严格的负实部，则该稳态是渐进稳定的。

下面针对一维和二维的系统，详细说明稳态的稳定性。

一维系统

对于一维系统，不失一般性，设稳态在0点，即 $\bar{x}_1 = 0$

系统 $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ 线性化后有 $\dot{x}_1 = (\partial f_1 / \partial x_1)|_{\bar{x}_1} x_1 = a_{11}x_1$，雅可比矩阵为 $A = \{a_{11}\}$，具有唯一的特征值$\lambda_1 = a_{11}$，系统的解就是$x_1(t) = x_1^0 e^{\lambda_1 t}$，

显然，当$\lambda_1 > 0$时，$e^{\lambda_1 t}$随时间t而增长，系统偏离原来的稳态（0）。

而当$\lambda_1 < 0$时， $e^{\lambda_1 t}$随时间t而减小，有$t \to \infty$时，$x_1(t) \to \bar{x}_1$ ，即系统渐进稳定。

而当$\lambda_1 = 0$时， 对线性系统的考察，不足以判定原系统在该稳态的渐进稳定性，此时，需要考虑高阶项的作用。

二维系统

对于2维系统，其一般形式为：

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1,\ x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1,\ x_2)$$

其线性化系统为：

$$\dot{x}_1 = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}} x_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} x_2$$
$$\dot{x}_2 = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}} x_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} x_2$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

要求**A**的特征值，需要解其特征多项式方程：

$$\lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\mathrm{Det}\,\mathbf{A}} = 0$$

于是有： $\lambda_{1/2} = \dfrac{\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}}{2} \pm \sqrt{\dfrac{(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})^2}{4} - \mathrm{Det}\,\mathbf{A}}$

对于 $\dfrac{(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A})^2}{4} - \mathrm{Det}\,\mathbf{A} \geq 0$, 其特征值是实数，

否则，特征值是复数， 解包含振荡的部分。

二维系统

对于2维系统而言，根据其雅可比矩阵特征值的符号，可以有下面这些情况：

1. $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$, 全为实数，稳定节点；

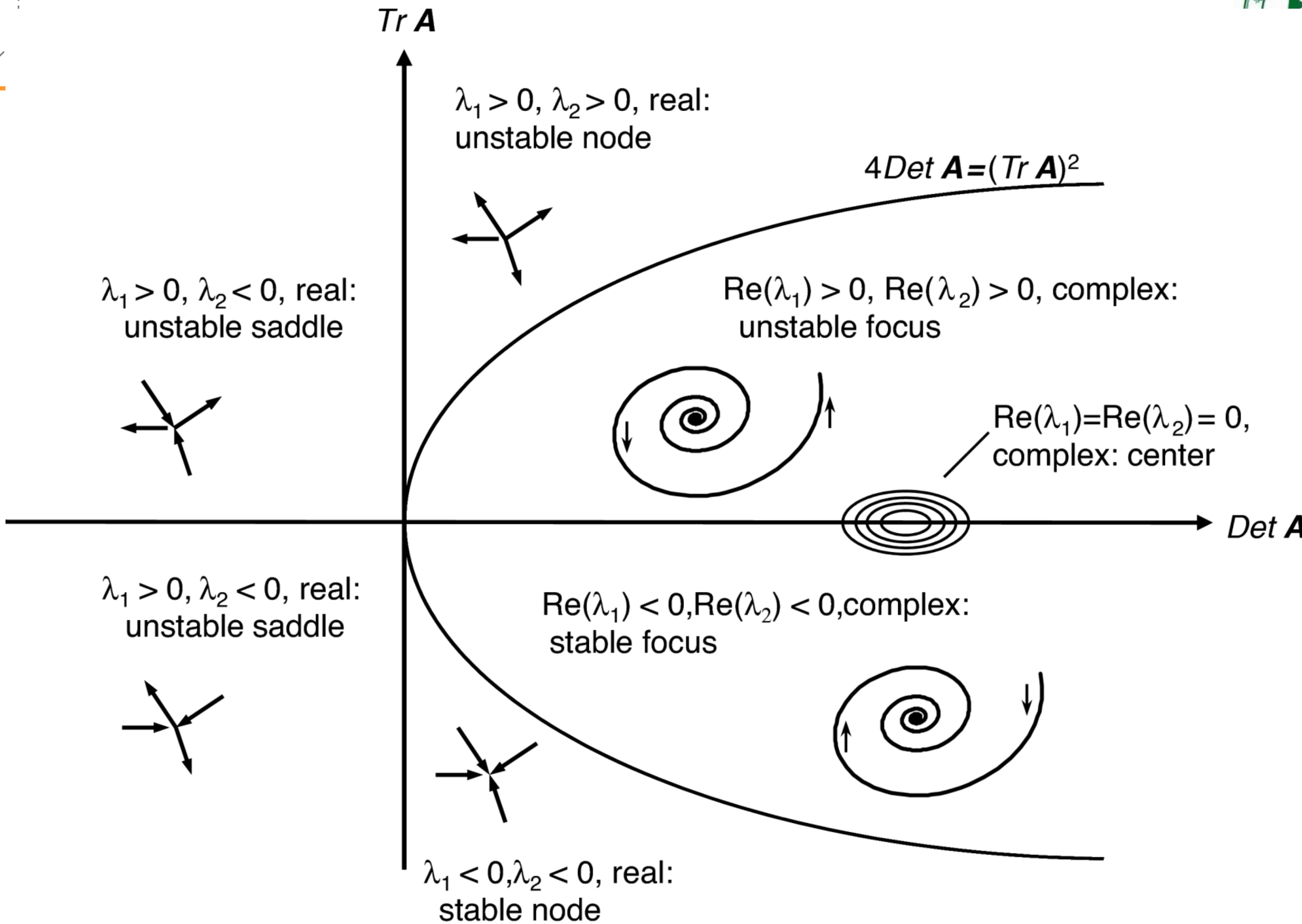
2. $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$, 全为实数，不稳定节点；

3. $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$, 全为实数，鞍点，不稳定；

4. $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0,\ \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, 全为复数但都具有负实部，稳定焦点；

5. $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0,\ \mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$, 全为复数但都具有正实部，不稳定焦点；

6. $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$, 全为复数但都具有零实部，中心点，不稳定；



Klipp - Systems Biology
ISBN: 978-3-527-31874-2 fig-02-09

线性化系统与原系统稳定性之间的关系

- 如果线性化系统的稳态是渐进稳定的，则原系统的稳态也是渐进稳定的；

- 如果线性化系统的稳态是鞍点、不稳定节点或不稳定焦点，则原系统的稳态也是不稳定的。

- 如果线性化系统的稳态是中心点，则原系统稳态的稳定性不可据此判定。

Routh-Hurwitz定理：对于维数n>2的系统，其ODE系统的特征多项式方程为：

$$c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

这一*n*阶多项式当*n*>4时，写不出解析解，但可以用Hurwitz判据，判断其特征值的实部是否为负，通过构建Hurwitz矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots & 0 \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & c_n & c_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0 \end{pmatrix} = \{h_{ik}\} \quad \text{with} \quad h_{ik} = \begin{cases} c_{n+i-2k}, & \text{if } 0 \le 2k-i \le n \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

如果特征多项式的所有系数c_i和该矩阵的所有前主子式都为正值，则特征多项式方程的所有解的实部都是负数。

稳态的全局稳定性

对于系统的一个状态，如果对于所有的初始条件当t→∞时，轨迹都能趋于该状态，则称此状态是全局稳定的。一个ODE系统的状态的全局稳定性，可以用Lyapunov函数来检验。

（1）通过坐标变换，将稳态转换成起始点$\hat{x} = x - \bar{x}$。

（2）寻找具有下述特性的所谓Lyapunov函数$V_L(x_1, \cdots, x_n)$

1）$V_L(x_1, \cdots, x_n)$对于所有的变量x_i有连续的导数；

2）$V_L(x_1, \cdots, x_n)$ 满足 $\begin{cases} V_L(x_1, \cdots, x_n) = 0, \text{当} x_i = 0 \\ V_L(x_1, \cdots, x_n) > 0, \text{当} x_i \neq 0 \end{cases}$

3）V_L的时间微分由下式给出

$$\frac{dV_L}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_L}{\partial x_i} f_i(x_1, \cdots, x_n)$$

那么，对于一个状态，

如果在它的领域内，$V_L(x(t))$的时间微分没有正值，则该状态是稳定的。

如果在它的领域内，$V_L(x(t))$的时间微分是负定的，

即$\begin{cases} dV_L/dt = 0, \text{当} x_i = 0 \\ dV_L/dt < 0, \text{当} x_i \neq 0 \end{cases}$，则系统在该状态是渐进稳定的。

举例

例如，对于系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

有解：

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 e^{-t} \\ x_2(t) = x_2^0 e^{-t} \end{cases}$$

状态 $x_1 = x_2 = 0$ 是渐进稳定的。

利用正定的函数 $V_L = x_1^2 + x_2^2$ 作为Lyapunov函数，可以用于判断全局稳定性。

因为，$dV_L/dt = \left(\partial V_L/\partial x_1\right)\dot{x}_1 + \left(\partial V_L/\partial x_2\right)\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1) + 2x_2(-x_2)$ 是负定的，

所以，系统稳态 $x_1 = x_2 = 0$ 是全局稳定的。

极限环

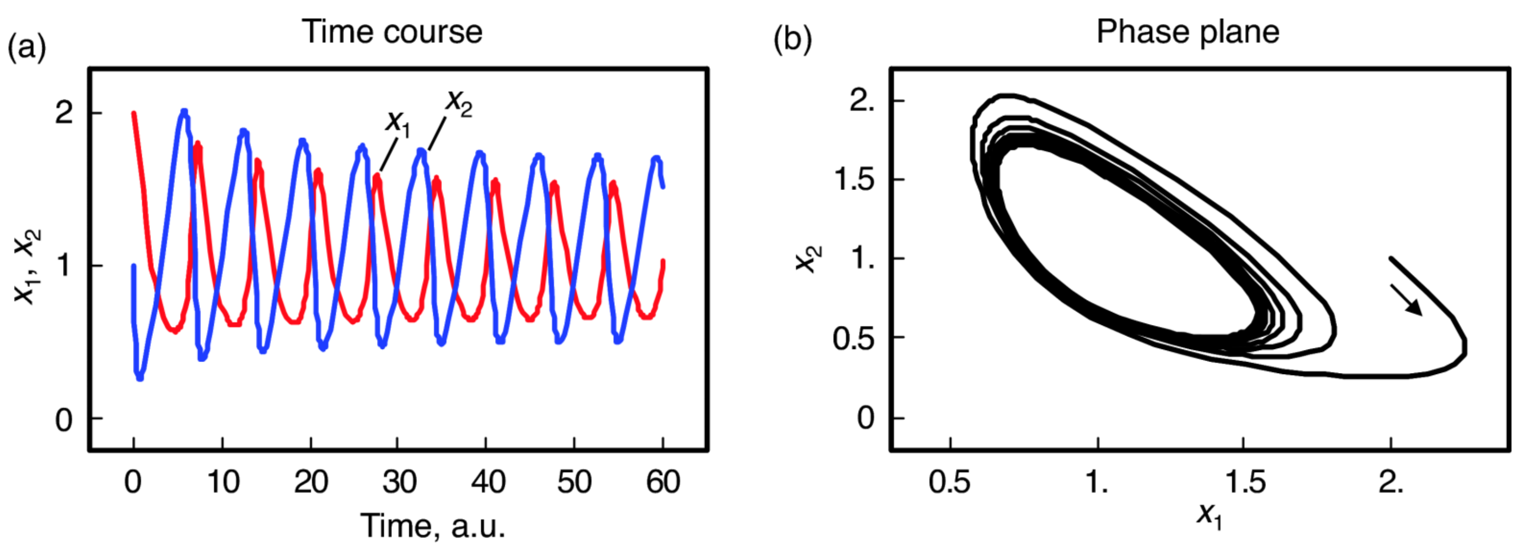
振荡行为是生物学中的一个典型现象。引起振荡的原因可能是外部的，也可能是内部的。如果相平面中存在极限环，则表明系统存在内部固有的稳态振荡。

极限环是一个封闭的轨迹，对于t→∞，所有邻近的轨道都是周期解，或趋近（稳定的）极限环，或远离（不稳定的）极限环。

例如，对于一个2维的非线性系统 $\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 - x_1,\ \dot{x}_2 = p - x_1^2 x_2$，有稳态 $\bar{x}_1 = p,\ \bar{x}_2 = 1/p$。

如果选 $p = 0.98$，则这个稳态是不稳定的，因为$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = 1 - p^2 > 0.$

在初始条件为 $x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 1$ 时，该系统解的时间过程和相平面如图所示。



Klipp - Systems Biology
ISBN: 978-3-527-31874-2
fig-02-10

华中农业大学
HUAZHONG AGRICULTURAL UNIVERSITY

有界系统

由状态变量 $\mathbf{x}=[x_1,\cdots,x_i,\cdots x_n]^{\mathrm{T}}$

和微分方程： $\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n)\qquad (i=1,\cdots,n)$

所描述的系统，有界性条件是指： $0\le x_i(t)\le\infty\qquad(\forall t\ge 0,\ 1\le i\le n).$

满足有界性条件的系统称为“有界系统”。

系统有界的条件为：

(1）对任意i，当$\mathbf{x}\ge 0$且$x_i=0$时，有$f_i(\mathbf{x})>0$;

(2) 存在$M_i>0\ (i=1,\cdots,n)$，使得对任意i，当$\mathbf{x}>0$且$x_i>M_i$时，有$f_i(\mathbf{x})<0$,

则由上述微分方程所描述的系统的初值为$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0>0$的解满足上述有界条件。

对于有界系统，可以证明上述微分方程至少有一个正平衡点$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$, 即满足

$$f_i(\mathbf{x}^*)=0\quad (i=1,\cdots,n)$$

的解，稳定的平衡点通常对应于生物系统中有生物意义的状态。

线性微分方程组

对于线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x},\ \ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$

如果系数矩阵**A**不依赖于时间t，就是常系数微分方程，有完善的求解理论，

其解可以表示为：$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$.

如果系数矩阵**A**依赖于时间，则一般不能表示成显式解。

如果已知上述方程的n个线性无关解$x_i(t)\ \ (i=1,\cdots,n)$，则该方程组的通解

可以表示成这n个解（也称为基础解系）的线性组合：

$x(t)=c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t)$，其中，$c_i$为常数。

XPPAUT软件介绍

XPPAUT is a tool for solving

differential equations,
difference equations,
delay equations,
functional equations,
boundary value problems, and
stochastic equations.

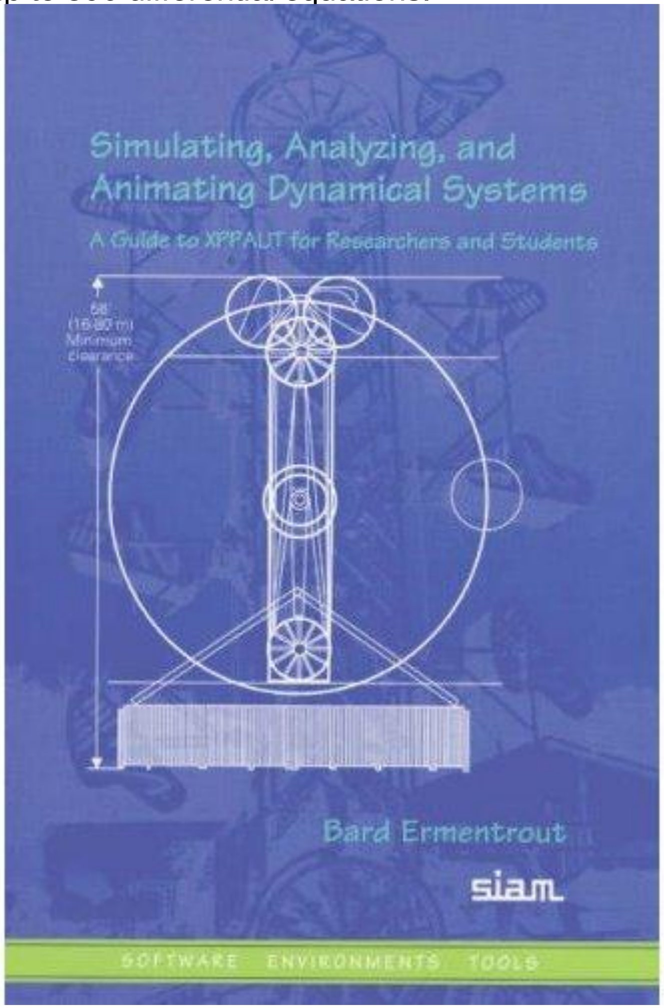
XPP contains the code for the popular bifurcation program, AUTO . Thus, you can switch back and forth between XPP and AUTO, using the values of one program in the other and vice-versa.

http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html

XPPAUT软件介绍

XPP has the capabilities for handling up to 590 differential equations.

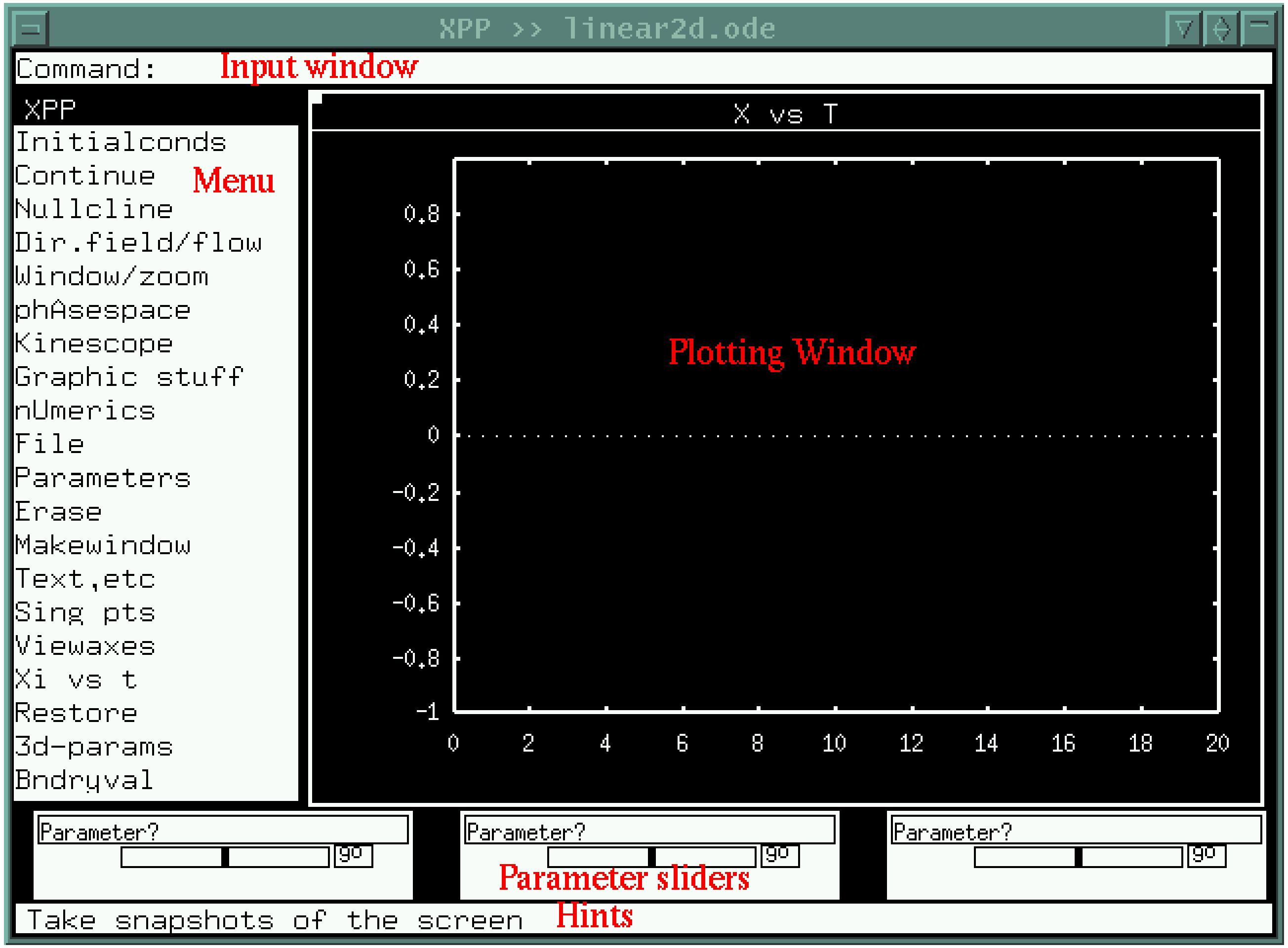
- There are over a dozen s and a symplectic solver.
- Up to 10 graphics windc ted.
- PostScript output is sup
- Post processing is easy ns to columns of your data.
- Equilibria and linear stal
- Null clines and flow field
- Poincare maps and equ
- Some useful averaging · re included.
- Equations with Dirac de
- There is a curve-fitter ba ts to the solutions to dynamical systems.
- It is possible to automat ametric changes in the attractor as some paramet
- Dynamically link to exte



XPPAUT is h 's, iPad!)

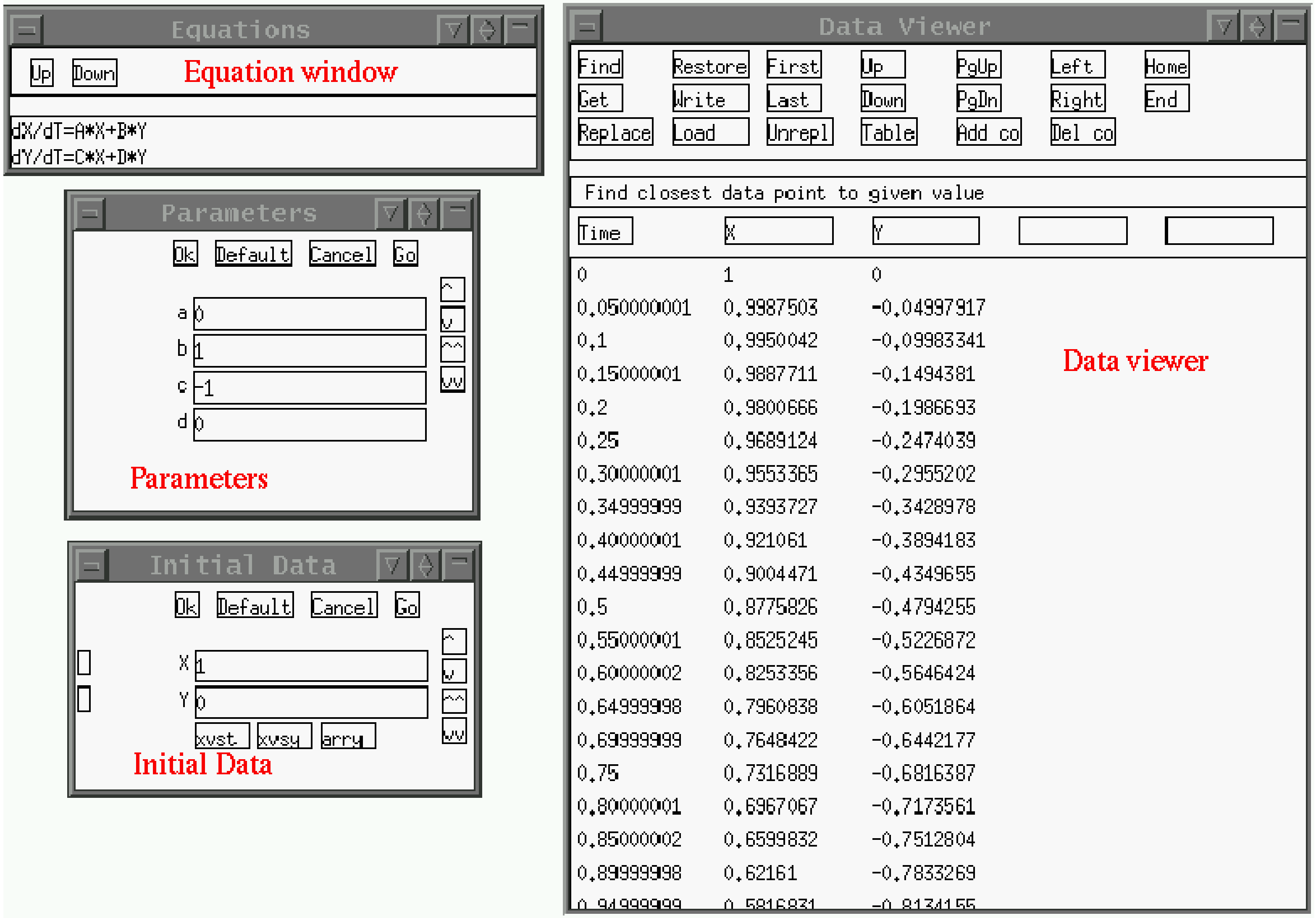
XPPAUT软件介绍

主界面

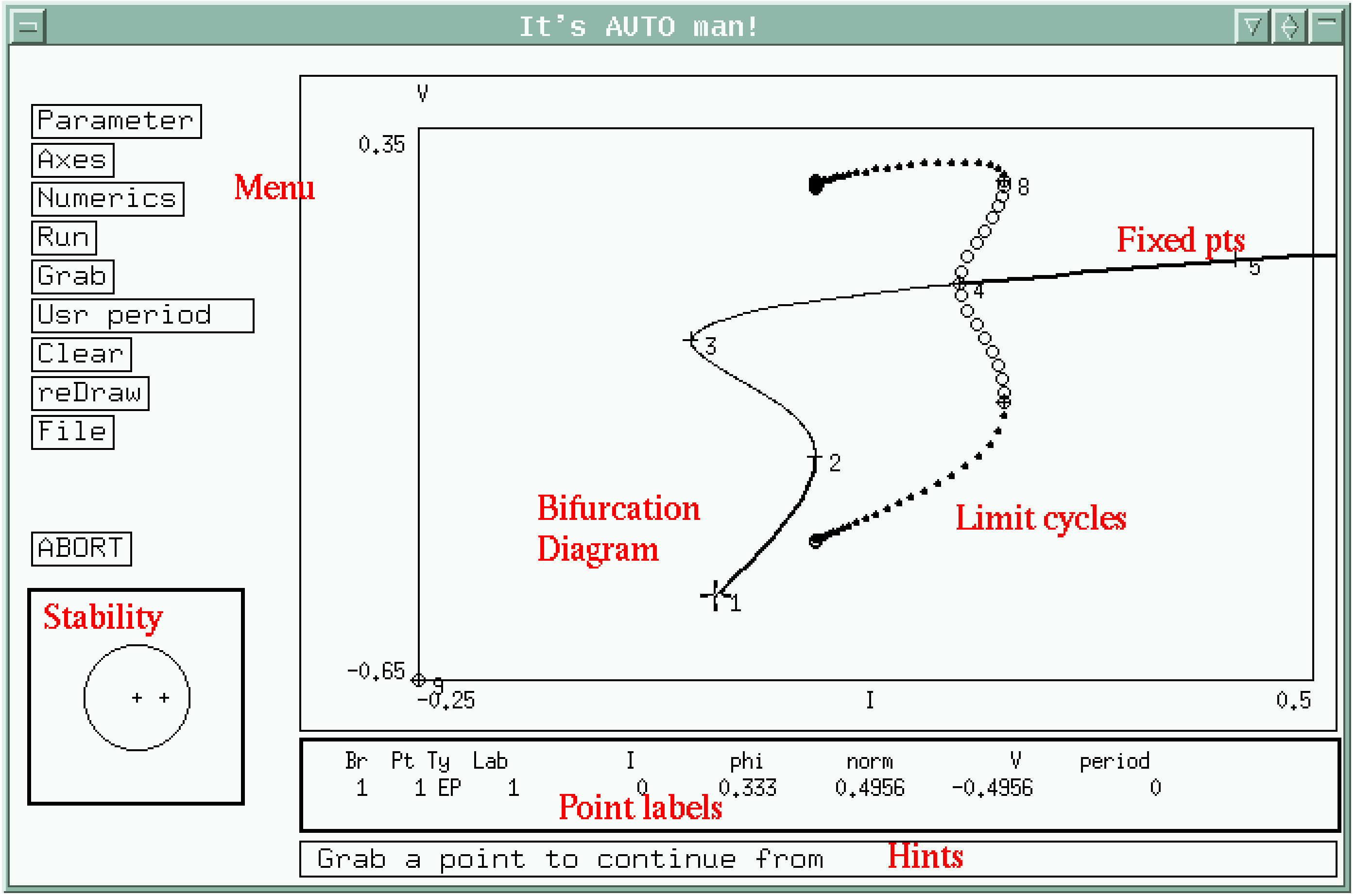


XPPAUT软件介绍

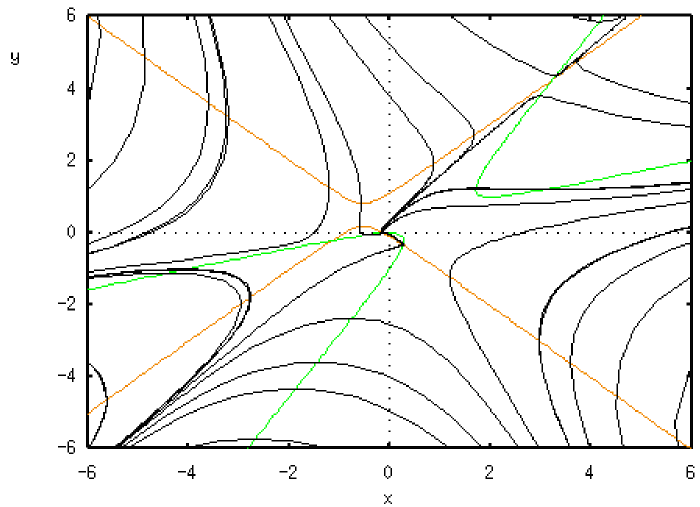
模型窗口



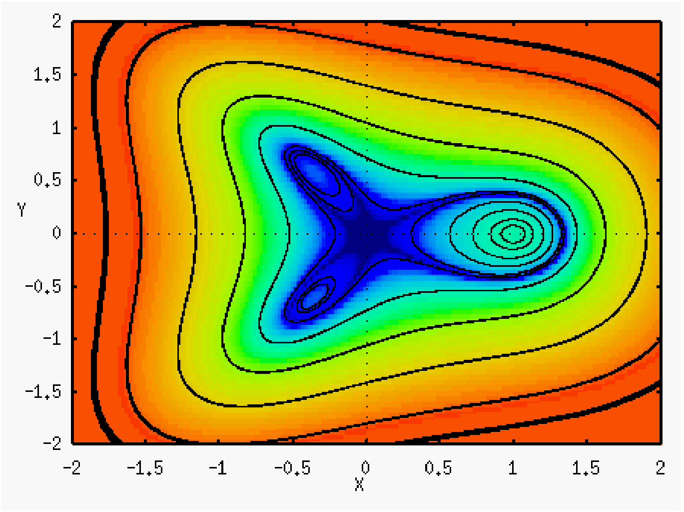
AUTO界面

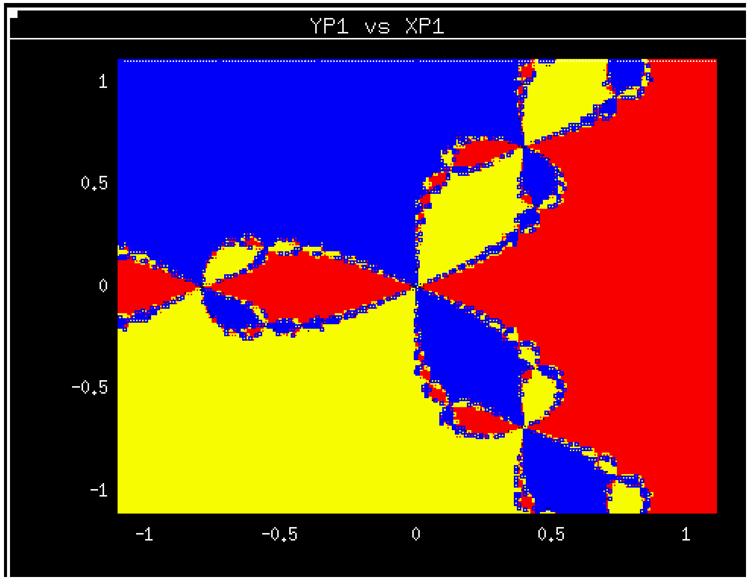

It's AUTO man!
Parameter
Axes
Numerics
Run
Grab
Usr period
Clear
reDraw
File
ABORT
Menu
Stability
V
0.35
-0.65
-0.25
I
0.5
Fixed pts
Bifurcation Diagram
Limit cycles
Br Pt Ty Lab I phi norm V period
1 1 EP 1 0 0.333 0.4956 -0.4956 0
Point labels
Grab a point to continue from
Hints

XPPAUT软件介绍



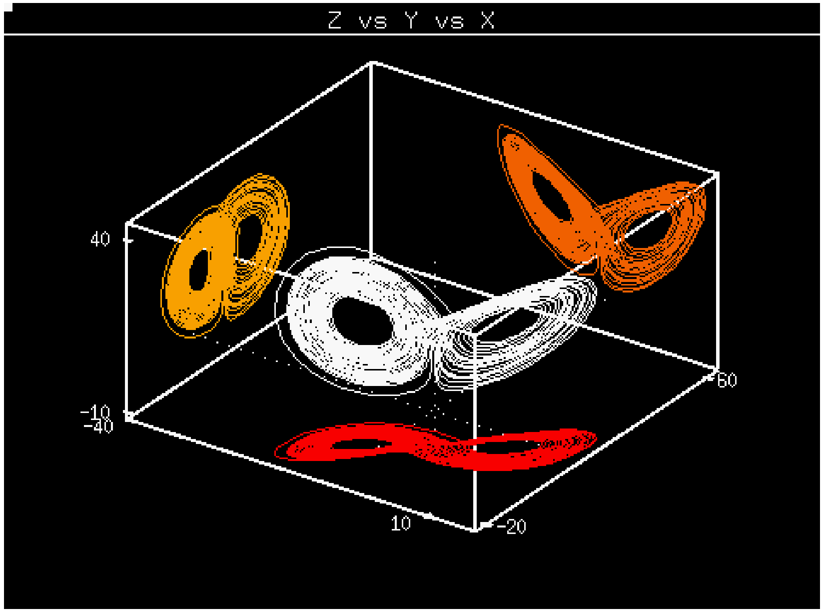
相平面





XPPAUT软件介绍

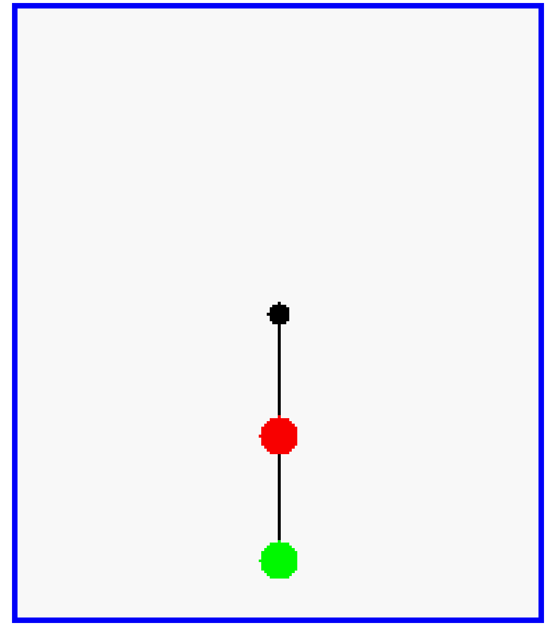
模型求解举例



洛仑兹吸引子

```
# the lorenz equations
# with some fancy graphics options
x'=s*(-x+y)
y'=r*x-y-x*z
z'=-b*z+x*y
par r=27,s=10,b=2.66
init x=-7.5,y=-3.6,z=30
# now add some projection planes for 2D plots
aux x2=xplane
aux y2=yplane
aux z2=zplane
par xplane=-35,yplane=60,zplane=-10
# set up the numerics
@ total=50,dt=.02
# set up 3D plot
@ xplot=x,yplot=y,zplot=z,axes=3d
# tell XPP there are 4 plots altogether
@ nplot=4
# here are the 3 projections
@ xp2=x,yp2=y,zp2=z2
@ xp3=x,yp3=y2,zp3=z
@ xp4=x2,yp4=y,zp4=z
# set up the 3D window
@ xmin=-40,xmax=18,ymin=-24,ymax=64,zmin=-12,zmax=45
@ xlo=-1.4,ylo=-1.7,xhi=1.7,yhi=1.7
# and rotate the plot a bit so it looks nice
@ theta=35
done
```

动画脚本



```
# animation of double pendulum
#
# frame it
permanent
rect 0;0;1;1;$BLUE;3
transient
fcircle .5;.5;.025;$BLACK
# here is the base
line .5;.5;.5+.2*sin(th1);.5-.2*cos(th1)
line .5+.2*sin(th1);.5-.2*cos(th1);.5+.2*sin(th1)+.2*sin(th2)\
;.5-.2*cos(th1)-.2*cos(th2)
fcircle .5+.2*sin(th1);.5-.2*cos(th1);.04;$RED
fcircle .5+.2*sin(th1)+.2*sin(th2);.5-.2*cos(th1)-.2*cos(th2);.04;$GREEN
end
```